23 octobre 2012
FLA #03

応用数学 B (*Fourier and Laplace Analysis*) 第 3 週

w.yamamoto

1　先週の内容

- 周期関数
- 周期関数について議論する際、周期を 2π 、積分区間を $[-\pi, \pi]$ として一般性を失わないこと
- フーリエ級数展開とフーリエ係数
- 偶感数と奇間数
- 区間毎の連続性
- 区間毎になめらかであること

2　今週の内容

- フーリエ級数の計算と性質
- フーリエ級数の計算例
- 複素フーリエ級数 (フーリエ変換の準備として)

2.1　フーリエ級数の計算

ある周期関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開する、とは不連続点を除いて

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{1}$$

で定まる展開の係数 $a_n, b_n, n = 1, \ldots$ を

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \tag{2}$$

で求めることと等しい。この級数展開は、不連続点ではジャンプの中点に、それ以外の点では元の関数 $f(x)$ の値に、それぞれ点ごとに収束する。

2.2　フーリエ級数展開の例

教科書 p.13 から p.18 に記載されている例はすべて、前述の a_n および b_n を求める問題の例であり、計算問題として問われたら、計算できなければならない。積分が苦手なら、計算をそのまま憶えること。

2.3　複素フーリエ級数

任意の複素数の指数関数表現は、オイラーの公式を用いて

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2}\frac{a + bi}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3}$$

と得られる。ここで $r = \sqrt{a^2 + b^2}$、$\theta = \cos^{-1}\left(a/\sqrt{a^2 + b^2}\right)$ と置いた。

周期 2π の複素関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + i\sum_{i=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{4}$$

で与えられる。オイラーの公式を用いると、

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{5}$$

として表せる。ここで複素フーリエ級数展開の係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx \tag{6}$$

で求まる。この積分は更に

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{7}$$

となる。

3　レポート課題 3

教科書の第 1 章の第 4 節に出てくるフーリエ級数の例と問題と例題、第 6 節に出てくる複素フーリエ級数の問題、すべて計算して、計算できるようにしておきなさい。

- 提出するもの：A4 ないし B5 のレポート用紙，ルーズリーフなど。片面でも両面でも可。
- 様式：(1) 順に書くこと。(2)1 ページ目の一番上に「学籍番号」「氏名」を記すこと。(3) 複数枚に渡るときには，ホッチキスなどで留めること。(両面の場合は折り曲げる可能性があること，予めお断りしておきます)
- 提出場所：今週以降は、火曜日中に先端工学基礎課程事務室に提出した分を、期限内として受け付けます。(期限に遅れて受理したものは、ハンド リングに自信がないので、返却は保証できません)
- 提出期限：2012.10.30(来週の火曜日) の 7 時まで。(〆切後、即座に学内便で送ってもらいます。)
- レポート作成上の注意：同様の問題が試験に出た時に，自分のノートには書いてあるのに，と後悔しなくて済むように，見ずには解けるように，解答を丁寧に計算過程まで記して下さい。また解答の中で「教科書の (**) 式より」などと，してはいけません。持ち込み不可の試験でも，式番号を覚えていられるのなら，話は別ですが。