15 novembre 2013
FLA #16

応用数学B (*Fourier and Laplace Analysis*) 期末試験 (フーリエ解析)

w.yamamoto

以下はフーリエ解析に関する問いである。点数配分はすべて 5 点である。配布するフーリエ変換表を用いてよい。

1. フーリエ級数に関する下記の問いに答えよ.

(1) $[-\pi, \pi)$ で $f(x) = |x|$ となる周期 2π の関数のフーリエ級数を求めよ.

(2) $[-\pi, \pi)$ で下記の値をとる周期 2π の関数のフーリエ級数の，$x = 0$ における収束先はどのような値か．理由と共に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < \pi) \\ -1 & (-\pi \le x < 0) \end{cases} \tag{1}$$

2. 2 階線形非同時常微分方程式

$$f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = \cos x \tag{2}$$

について，下記の問いに答えよ.

(1) フーリエの積分公式を記した上で，公式の意味を説明せよ.

(2) $\cos x$ のフーリエ変換を導出せよ．(フーリエ変換表を書き写すのでは 0 点)

(3) $f'(x)$ のフーリエ変換を導出せよ．ただしこの小問でのみ，f のフーリエ変換は F としてよい．(フーリエ変換表を書き写すのでは 0 点)

(4) 式 (2) の微分方程式のフーリエ変換を示せ.

(5) 前問で得た方程式を f のフーリエ変換について整理し、f のフーリエ変換を求めよ.

(6) 前問の答えを逆フーリエ変換し，f の特殊解を求めよ.

(7) 式 (2) の微分方程式の一般解を求めよ.

(8) 以上の解答を踏まえて，式 (2) の微分方程式の解を求めよ.

A. フーリエ変換表

$\mathscr{F}1$	$f'(x)$	$i\omega F(\omega)$
$\mathscr{F}2$	$f''(x)$	$(i\omega)^2 F(\omega)$
$\mathscr{F}3$	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
$\mathscr{F}4$	$f(x-c)$	$e^{-i\omega c} F(\omega)$
$\mathscr{F}5$	$f(\alpha x)$	$\dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)$
$\mathscr{F}6$	$\overline{f(x)}$	$\overline{F(-\omega)}$
$\mathscr{F}7$	$\overline{f(-x)}$	$\overline{F(\omega)}$
$\mathscr{F}8$	$xf(x)$	$i\dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$
$\mathscr{F}9$	$x^n f(x)$	$i^n \dfrac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
$\mathscr{F}10$	$f * g(x)$	$F(\omega)\cdot G(\omega)$
$\mathscr{F}11$	$f(x)\,g(x)$	$\dfrac{1}{2\pi} F * G(\omega)$
$\mathscr{F}12$	$\delta(x)$	1
$\mathscr{F}13$	$\delta(x-c)$	$e^{-i\omega c}$
$\mathscr{F}14$	$\delta'(x)$	$i\omega$
$\mathscr{F}15$	1	$2\pi\delta(\omega)$
$\mathscr{F}16$	$u(x)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{i\omega}$
$\mathscr{F}17$	$u(x-c)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{i\omega} e^{-i\omega c}$
$\mathscr{F}18$	x	$2\pi i\delta'(\omega)$
$\mathscr{F}19$	x^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$
$\mathscr{F}20$	$\dfrac{1}{x}$	$\pi i - 2\pi i u(\omega)$
$\mathscr{F}21$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\big(\pi i - 2\pi i u(\omega)\big)$
$\mathscr{F}22$	$e^{-ax}\,u(x)$	$\dfrac{1}{i\omega + a}$
$\mathscr{F}23$	$-\,e^{ax}\,u(-x)$	$\dfrac{1}{i\omega - a}$
$\mathscr{F}24$	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\mathscr{F}25$	$x\,e^{-ax}\,u(x)$	$\dfrac{1}{(i\omega + a)^2}$
$\mathscr{F}26$	$x^n\,e^{-ax}\,u(x)$	$\dfrac{n!}{(i\omega + a)^{n+1}}$
$\mathscr{F}27$	$\sin cx$	$i\pi\big(\delta(\omega + c) - \delta(\omega - c)\big)$
$\mathscr{F}28$	$\cos cx$	$\pi\big(\delta(\omega + c) + \delta(\omega - c)\big)$
$\mathscr{F}29$	$e^{-ax}\sin cx\,u(x)$	$\dfrac{c}{(i\omega + a)^2 + c^2}$
$\mathscr{F}30$	$e^{-ax}\cos cx\,u(x)$	$\dfrac{i\omega + a}{(i\omega + a)^2 + c^2}$

フーリエ変換表・ラプラス変換表における定数は，次のとおりである．

- a は正の定数（$a > 0$）．
- α は 0 でない実定数（$\alpha \neq 0$）［ $\mathscr{F}5$ のみ ］．
- c, γ は任意の実定数．
- n は自然数（$n = 1, 2, \cdots$）．

略解

1.

(1) 教科書 p.14 参照.

(2) 0。不連続点では右側極限と左側極限の中点に収束するから。

2.

(1) 教科書 4.2 節.

(2) 教科書 p.75 の (4.41) 式の導出は、教科書 (4.35) 式から.

(3) 教科書 p.71 の (4.27) 式の下の計算式.

(4) 教科書 6.1 節と 6.2 節を参照.

(5) これ以下，6.2 節の例題を改題しただけ.

(6)

(7)

(8) 一般解と特殊解の和で与える.