確率論　第４週　確率分布の特徴量

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 連続な確率変数の取り扱いの練習

確率変数 X_1 の累積分布関数 $F_1(x) = Pr[X_1 \leq x]$ を

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} \tag{1}$$

X_2 の累積分布関数 $F_2(x) = Pr[X_2 \leq x]$ を

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1/2 & (0 \leq x < 1/2) \\ 1 & (1/2 \leq x) \end{cases} \tag{2}$$

とする。また、(X_1 とも X_2 とも異なる別の) 確率変数 X は

$$G(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x) \tag{3}$$

という累積分布関数をもつ確率分布に従うとする。これら 3 つの確率変数 X_1、X_2、X について、以下の問いに答えよ。

1-1 X_1 について、

1-1-a 次の 4 つの確率を求めよ。

Ans. $Pr[0 < X_1 < 1/2] =$ 　　　　$Pr[0 \leq X_1 < 1/2] =$
$Pr[0 < X_1 \leq 1/2] =$ 　　　　, $Pr[0 \leq X_1 \leq 1/2] =$

1-1-b 平均 $E[X_1]$ と 2 次モーメント $E\left[X_1^2\right]$ を求めよ。

Ans. $E[X_1] =$ 　　　　, $E\left[X_1^2\right] =$

1-2 X_2 について、

1-2-a 次の 4 つの確率を求めよ。

Ans. $Pr[0 < X_2 < 1/2] =$ 　　　　$Pr[0 \leq X_2 < 1/2] =$
$Pr[0 < X_2 \leq 1/2] =$ 　　　　, $Pr[0 \leq X_2 \leq 1/2] =$

1-2-b 平均 $E[X_2]$ と 2 次モーメント $E\left[X_2^2\right]$ を求めよ。

Ans. $E[X_2] =$ 　　　　, $E\left[X_2^2\right] =$

1-3 X について、

1-3-a 平均 $E[X]$ と分散 $V[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2$ を求めよ。

Ans. $E[X] =$ 　　　　, $V[X] =$

1-3-b 上で求めた分散 $V[X]$ を最大にする α と最小にする α を求めよ。

Ans. 最大にする $\alpha =$ 　　　　, 最初にする $\alpha =$

確率論　第４週　確率分布の特徴量　略解

1. 連続な確率変数の取り扱いの練習

確率変数 X_1 の累積分布関数 $F_1(x) = Pr[X_1 \leq x]$ を

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} \tag{4}$$

X_2 の累積分布関数 $F_2(x) = Pr[X_2 \leq x]$ を

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1/2 & (0 \leq x < 1/2) \\ 1 & (1/2 \leq x) \end{cases} \tag{5}$$

とする。また、(X_1 とも X_2 とも異なる別の) 確率変数 X は

$$G(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x) \tag{6}$$

という累積分布関数をもつ確率分布に従うとする。これら 3 つの確率変数 X_1、X_2、X について、以下の問いに答えよ。

1-1 X_1 について、

1-1-a 次の 4 つの確率を求めよ。

$$Pr[0 < X_1 < 1/2] = Pr[0 < X_1 \leq 1/2] = Pr[X_1 \leq 1/2] - Pr[X \leq 0] = F(1/2) - F(0) = 1/2 \tag{7}$$
$$Pr[0 \leq X_1 < 1/2] = Pr[0 \leq X_1 \leq 1/2] = Pr[0 < X_1 \leq 1/2] = 1/2 \tag{8}$$
$$Pr[0 < X_1 \leq 1/2] = 1/2 \tag{9}$$
$$Pr[0 \leq X_1 \leq 1/2] == Pr[0 < X_1 \leq 1/2] = 1/2 \tag{10}$$

1-1-b 平均 $E[X_1]$ と 2 次モーメント $E\left[X_1^2\right]$ を求めよ。

X_1 の確率分布 F_1 は連続確率分布であり、$x \in [0,]$ で $f_1 = \frac{d}{dx}F = 1$ という値を、それ以外のところでは $f_1 = \frac{d}{dx}F = 0$ という値をとる。だから、

$$E[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\, dx = \int_0^1 x(x)\, dx = 1/2 \tag{11}$$
$$E\left[{X_1}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\, dx = \int_0^1 x^2(x)\, dx = 1/2 \tag{12}$$

1-2 X_2 について、

1-2-a 次の 4 つの確率を求めよ。

$$Pr[0 < X_2 < 1/2] = Pr[X_2 \notin \{0, 1/2\}] = 0 \tag{13}$$
$$Pr[0 \leq X_2 < 1/2] = Pr[X_2 = 0] = Pr[0 \leq X_2 < 1/2] = 1/2 \tag{14}$$
$$Pr[0 < X_2 \leq 1/2] = Pr[X_2 = 1/2] = Pr[X \leq 1/2] - Pr[X < 1/2] = 1 - 1/2 = 1/2 \tag{15}$$
$$Pr[0 \leq X_2 \leq 1/2] == Pr[X_2 \in \{0, 1/2\}] = 1 \tag{16}$$

1-2-b 平均 $E[X_2]$ と 2 次モーメント $E\left[X_2^2\right]$ を求めよ。X_2 の確率分布 F_2 は離散確率分布であり、確率関数は $p_2(0) = Pr[X_2 = 0] = 1/2$、$p_2(1/2) = Pr[X_2 = 1/2] = 1/2$ でのみ定義され、残りの場合にはすべて 0 となる。だから、

$$E[X_2] = 0 \times 1/2 + 1/2 \times 1/2 = 1/4 \tag{17}$$
$$E\left[{X_2}^2\right] = 0^2 \times 1/2 + (1/2)^2 \times 1/2 = 1/8 \tag{18}$$

1-3 X について、

1-3-a 平均 $E[X]$ と分散 $V[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2$ を求めよ。

これは少し難問、でもなくて、何とかなる。初めに X の関数の期待値と分散について、整理しておく。X の関数を $h(X)$ と置く。$E[h(X)]$ の計算は、確率分布 G について行うことになるが、F_1 が連続分布、F_2 が離散分布となる。これに臆することなく、形式的に

$$\begin{aligned} E[h(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\alpha f_1(x)\,dx + \sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x)(1-\alpha)\,p_2(x) \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f_1(x)\,dx + (1-\alpha)\sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x)\,p_2(x) \qquad (19) \\ &= \alpha E_{X_1}[h(X_1)] + (1-\alpha)\,E_{X_2}[h(X_2)] \qquad (20) \end{aligned}$$

と書けば、これで X に関する期待値の計算ができる。$h(X) = X$ ならば確率分布の期待値、$h(X) = (X-\mu)$ ならば確率分布の分散であることに注意する。実際、

$$E[X] = \alpha \times 1/2 + (1-\alpha) \times 1/4 = (\alpha - 1)/4 \qquad (21)$$

$$V[X] = \alpha \times 1/2 + (1-\alpha) \times 1/8 = (3\alpha + 1)/8 \qquad (22)$$

となる。

1-3-b 上で求めた分散 $V[X]$ を最大にする α と最小にする α を求めよ。

α は 0 から 1 までの値をとるので、分散の最小値は 1/8、最大値は 1/2 である。