31 mai 2012
PROB #7

確率論 (*Probability Theory*) 第 7 週

w.yamamoto

1 モーメント母関数

まず、モーメント母関数 $M_X(t)$ を定義する。標本空間 $\mathcal{X}$ 上の確率変数 X が従う確率分布 F のモーメント母関数 (moment generating function[1]) は、

$$M_X(t) = E[\exp(tX)] \tag{1}$$

で与えられる。$\mathcal{X}$ が離散集合で X が離散確率変数の場合、

$$M_X(t) \equiv E[\exp(tX)] = \sum_{k\in\mathcal{X}} \exp(tk)\, p(k) \tag{2}$$

$\mathcal{X}$ が連続集合で X が連続確率変数の場合、

$$M_X(t) \equiv E[\exp(tX)] = \int_{x\in\mathcal{X}} \exp(tx)\, f(x)\, dx \tag{3}$$

モーメント母関数はラプラス変換と密接な関係を持つ。X が $(-\infty,\infty)$ で連続な確率密度関数を持つ場合、$M_X(-t)$ は

$$M_X(-t) \equiv E[\exp(-tX)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-tx)\, f(x)\, dx \tag{4}$$

と $f(x)$ の両側ラプラス変換となる。同様に X が $[0,\infty)$ で連続な確率密度関数を持つ場合、 $M_X(-t)$ は

$$M_X(-t) \equiv E[\exp(-tX)] = \int_{0}^{\infty} \exp(-tx)\, f(x)\, dx \tag{5}$$

と $f(x)$ の片側ラプラス変換となる。

さて、 $M_X(t)$ がモーメント母関数と呼ばれる理由を説明しよう。$\exp(tX)$ は $tX = 0$ の回りでテイラー展開ができて、

$$\exp(tX) = 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + O\left(X^5\right),\ (tX \to 0) \tag{6}$$

より、

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\exp(tX)] \\
&= E\left[1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \frac{t^4X^4}{4!} + O\left(t^5X^5\right)\right],\ (tX \to 0) \\
&= E\left[1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \frac{t^4X^4}{4!} + O\left(t^5X^5\right)\right],\ (tX \to 0) \\
&= 1 + E[tX] + E\left[\frac{t^2X^2}{2!}\right] + E\left[\frac{t^3X^3}{3!}\right] + E\left[\frac{t^4X^4}{4!}\right] + O\left(t^5\right), \\
&= 1 + tE[t] + \frac{t^2}{2!}E\left[X^2\right] + \frac{t^3}{3!}E\left[X^3\right] + \frac{t^4}{4!}E\left[X^4\right] + O\left(t^5\right), \\
&= 1 + tm_1 + \frac{t^2}{2!}m_2 + \frac{t^3}{3!}m_3 + \frac{t^4}{4!}m_4 + O\left(t^5\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

[1] 英語ではモーメントを生成する関数、という意味

を得る。この式は、左辺がモーメント母関数で、右辺は原点のまわりのモーメント $m_k, k = 1, 2, \ldots$ を展開係数に持つ、テイラー展開の表現である。この式 (7) より、関数 $M_X(t)$ の原点 $t = 0$ における一階の導関数 (傾き) が

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt} M_X(t)\right|_{t=0} &= \left. m_1 + t m_2 + \frac{t^2}{2!} m_3 + \frac{t^3}{3!} m_4 + O\left(t^4\right)\right|_{t=0} \\ &= m_1 \end{aligned} \tag{8}$$

と、X の期待値 (原点まわりの 1 次のモーメント) に等しいことが分かる。以下、順に、二階の導関数が

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\right|_{t=0} &= \left. m_2 + t m_3 + \frac{t^2}{2!} m_4 + O\left(t^3\right)\right|_{t=0} \\ &= m_2 \end{aligned} \tag{9}$$

のように X^2 の期待値 (原点まわりの 2 次のモーメント) となり、同様に

$$\left.\frac{d^3}{dt^3} M_X(t)\right|_{t=0} = m_3 \tag{10}$$

$$\left.\frac{d^4}{dt^4} M_X(t)\right|_{t=0} = m_4 \tag{11}$$

を得る。このように $M_X(t)$ は、すべてのモーメントを原点 $t = 0$ 近傍の性質として持つ。また k 階の導関数を求めて $t = 0$ で評価すると、k 次の原点まわりのモーメントを得る。これが $M_X(t)$ がモーメント母関数と呼ばれる理由である。

モーメント母関数には、幾つかの重要な性質がある。

1. 確率変数 X のモーメント母関数 $M_X(t)$ と確率変数 Y のモーメント母関数 $M_Y(t)$ が $t = 0$ の近傍で一致するとき、その２つの確率変数は同じ確率分布に従う。

2. ２つの確率変数 X および Y が互いに独立なとき、それらの和 $X + Y$ の確率分布のモーメント母関数 $M_{X+Y}(t)$ は、各確率変数のモーメント母関数 $M_X(t)$ および $M_Y(t)$ の積で与えられる。

3. モーメント母関数は全ての確率分布に存在する訳ではない。

上のひとつ目の性質は、$t = 0$ 近傍以外では関数 $M_X(t)$ と $M_Y(t)$ が異なる形状を持っていても、確率分布としては同じになる、という興味深い性質である。

２つ目の性質は、確率分布を導出する上でとても重要な性質である。確率変数 X のモーメント母関数を $M_X(t)$、確率変数 Y のモーメント母関数を $M_Y(t)$ とすると、<u>X と Y が互いに独立</u>なとき、$X + Y$ の確率分布のモーメント母関数は

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t) \tag{12}$$

で与えられる。このことは、少し話が長くなるが、次のように示せる。

X と Y を、それぞれ密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(y)$ を持つ $(-\infty, \infty)$ 上の連続確率変数とする。このとき $Z = X + Y$ が z 以下となる確率は

$$\begin{aligned} F(z) &= Pr[Z = X + Y \leq z] \\ &= \int\int_{x+y\leq z} f_X(x) f_Y(y)\, dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)\, dy \right\} f_X(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z - x) f_X(x)\, dx \end{aligned} \tag{13}$$

と得られる。両辺を微分すれば

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z-x) f_X(x)\, dx \tag{14}$$

また X と Y を交換しても、同じ計算が成り立つので、

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy \tag{15}$$

となる。これはラプラス変換を習った時に出てきた、たたみ込み演算そのものである。「たたみ込みのラプラス変換は、ラプラス変換の積」という事実を覚えていれば、「たたみ込みのモーメント母関数は、モーメント母関数の積」という関係も、問題なく受け入れられるだろう。

$[0,\infty)$ 上の独立な 2 つの確率変数の和の分布の密度関数を

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy \tag{16}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
M_{f*g}(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} f * g(x)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx} \left\{ \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy \right\} dx \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ \int_y^{\infty} e^{tx} f(x-y)\, g(y)\, dx \right\} dy \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{t(z+y)} f(z)\, g(y)\, dz \right\} dy, \quad \text{where } z = x-y \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{tz} e^{ty} f(z)\, g(y)\, dz \right\} dy \\
&= \left\{ \int_0^{\infty} e^{tz} f(z)\, dz \right\} \left\{ \int_0^{\infty} e^{ty} g(y) \right\} dy \\
&= M_X(t)\, M_Y(t)
\end{aligned} \tag{17}$$

が導ける。この計算が成り立つ条件は、X も Y もモーメント母関数を持つことと、積分の交換が可能なこと、である。

標本空間が $(-\infty,\infty)$ の場合には、たたみ込みは f や g の変数が非負であることを気にしなくてよくなり、

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \tag{18}$$

と定義される。この場合も

$$\begin{aligned}
M_{f*g}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f * g(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x-y)\, g(y)\, dx \right\} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(z+y)} f(z)\, g(y)\, dz \right\} dy, \quad \text{where } z = x-y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} e^{ty} f(z)\, g(y)\, dz \right\} dy \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f(z)\, dz \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} g(y) \right\} dy \\
&= M_X(t)\, M_Y(t)
\end{aligned} \tag{19}$$

と、たたみ込みのモーメント母関数は、モーメント母関数の積となることが、確かめられる。

1.1 二項分布のモーメント母関数

二項分布のモーメント母関数は、二項分布の確率変数が、互いに独立なベルヌーイ試行の確率変数の和で表されることを利用して求める。

成功確率 p のベルヌーイ試行の確率関数は

$$p(k) = p^k (1-p)^{1-k},\ k = 0, 1. \tag{20}$$

この確率関数を持つ確率分布のモーメント母関数は

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = e^{t\cdot 0} p(0) + e^{t\cdot 1} p(1) \\ &= 1\cdot(1-p) + e^t \cdot p = pe^t + 1 - p \end{aligned} \tag{21}$$

$X_1, X_2, \ldots$ を互いに独立なベルヌーイ試行変数の列とすると、それぞれのベルヌーイ試行の確率分布のモーメント母関数は上と同じく

$$M_{X_i}(t) = 1\cdot p + e^t \cdot p,\ \ i = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

となる。今 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とすると、Y は n 回の独立なベルヌーイ試行での成功回数となるから、Y の確率分布は二項分布となる。このとき、Y の確率分布のモーメント母関数は

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\ &= \left(pe^t + 1 - p\right) \end{aligned} \tag{23}$$

2 レポート略解

二項分布のモーメント母関数は、$n = 3$ ぐらいまでならなんとか計算できる。$n = 1$ の場合、

$$M_X(t) = pe^t + 1 - p \tag{24}$$

$n = 2$ の場合、

$$\begin{aligned} M_X(t) &= p^2 e^{2t} + 2pe^t (1-p) + (1-p)^2 \\ &= \left(pe^t + 1 - p\right)^2 \end{aligned}$$

$n = 3$ の場合も、

$$\begin{aligned} M_X(t) &= p^3 e^{3t} + 3p^2 e^{2t} (1-p) + 3pe^t (1-p)^2 + (1-p)^2 \\ &= \left(pe^t + 1 - p\right)^3 \end{aligned}$$

実は一般の n についても

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{kt} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(e^t\right)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(pe^t\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(pe^t + 1 - p\right)^n \end{aligned} \tag{25}$$

と求めることができる。最後の式は二項定理による。
指数分布のモーメント母関数は

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E\left[e^{tx}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}dx \\ &= \lambda\left[\frac{1}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\right]_0^\infty \\ &= \lambda\left[\frac{1}{t-\lambda}\lim_{x\to\infty}e^{(t-\lambda)x} - \frac{1}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)0}\right] \\ &= \lambda\left[\frac{1}{t-\lambda}\lim_{x\to\infty}e^{(t-\lambda)x} - \frac{1}{t-\lambda}\right] \qquad (26)\end{aligned}$$

となる。ここで $t-\lambda=0$ のとき分母が 0 、$t-\lambda>0$ ならば極限が ∞ に発散となるので、$t\geq\lambda$ の範囲ではモーメント母関数は存在しない。$t-\lambda<0$ のとき、$\exp(t-\lambda)x$ で $x\to\infty$ とすると 0 に収束するので、

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}(0-1) = \frac{\lambda}{\lambda-t} \qquad (27)$$

を得る。

3 レポート課題

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\lambda)$ は、確率密度関数を

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\ \ x>0 \qquad (28)$$

とする、$(0,\infty)$ 上の連続確率分布である。これは (完全) ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (29)$$

から定まる確率分布である。左辺の積分が有限の範囲 $(0,s)$ のとき、この積分を不完全ガンマ関数と言う。
ベータ分布 $B(\alpha,\beta)$ は、確率密度関数を

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ \ 0<x<1 \qquad (30)$$

とする、$(0,1)$ 上の連続確率分布である。これはベータ関数

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\ \ x>0,\ y>0. \qquad (31)$$

から定まる確率分布である。
#7-1 ガンマ関数とベータ関数にはどのような関係があるか、記せ。
#7-2 ガンマ関数の平均と分散を求めよ。
#7-3 ベータ関数の平均と分散を求めよ。
#7-4 ２つの互いに独立な連続確率変数 X および Y 、それぞれの確率分布の確率密度関数を $f(x)$ および $g(y)$ と書く。この時、以下の関係を示せ。

1. $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$
2. $V[X+Y]=V[X]+V[Y]$
3. a,b を任意の定数として、$E[aX+b]=aE[X]+b$
4. a を任意の定数として、$V[aX]=a^2V[X]$

4　確率分布の計算に関するメモ

確率論に出てくる計算の種類は、実は多くはない。積分計算も、式変形や変数変換を施して、既知の積分に帰着させることが通例だが、それでも幾つかの量や積分には、慣れておくのが望ましい。その中の幾つかを次に掲げておく。

4.1　ポアソン分布

ポアソン分布に関する計算には、$\exp(\lambda)$ のマクローリン展開 ($\lambda = 0$ の回りでのテイラー展開)

$$\exp\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{32}$$

と、次の全確率の式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1\end{aligned} \tag{33}$$

が用いられる。

期待値の計算は

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\lambda^{l}}{(l)!},\quad (l=k-1)\\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda\end{aligned} \tag{34}$$

分散の計算は、二項分布と同様に、

$$V[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \tag{35}$$

のどちらでもなく、少し巧妙に、

$$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \tag{36}$$

を用いると、計算が簡単になる。k^2 をかけて総和を求めるより、$k(k-1)$ をかけた総和を求める方が、階乗 ($k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1$) に馴染みやすい。

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{n} \frac{\lambda^{l}}{(l)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 \qquad (37)
\end{aligned}
$$

より、

$$V[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad (38)$$

を得る。同様にモーメント母関数も

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\exp(Xt)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^t\right)^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

と計算できる。

その他、ポアソン分布の導出には、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \qquad (40)$$

の極限も知っている必要がある。

5 レポート提出要領

下記の要領でレポートを作成し、提出すること。

課題番号	#7 (2012.05.31 出題)
提出期限	2012 年 6 月 4 日 午後 4 時 30 分
提出場所	西 5 号館 3 階総合情報学科事務室前の集合ポストの「確率論」とある投函口
様　　式	Ａ４もしくはＢ５（ルーズリーフ可、両面可）
そ の 他	丸写しは採点していて飽きるし、剽窃は自分のためにならない 各自が自力で取り組むことを、切に願う 成書を参考にするなとは言わないが、参考にした書籍があれば、著者への礼儀として必ず記すこと 表紙はつけないこと １ページ目の上部に、「講義名」「レポート番号」「学籍番号」「氏名」「投函日」を記すこと

下記は見本である。

参考文献

[1] 微分積分学の教科書.

[2] 永田靖 (2005) 「統計学のための数学入門 30 講」朝倉書店.

[3] 宮川雅巳 (1988) 「統計技法」 共立出版.

[4] 稲垣宣生 (2003) 「数理統計学」改訂版, 裳華房.