Hand out

確率論 (*Probability*) 第 7 週

due	22 mai 2014
cur	22 mai 2014
ver	1
rev	0

w.yamamoto

1　確率分布の特徴量 #2

1.1　モーメント

確率分布 F に従う確率変数 X の k 乗の期待値を、確率分布の k 次の (原点) モーメントといい、m に次数の添字 k を付けて表す。

$$m_k = E\left[X^k\right],\ k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

また確率分布 X の期待値 μ からの差の k 乗の期待値を確率分布の k 次の中心モーメントといい、μ に次数の添字 k を付けて表すことがある。

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right],\ k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

m_1 は確率分布 F の平均

$$m_1 = \mu \tag{3}$$

であり、μ_1 は常に 0 となる。また μ_2 は確率分布 F の分散

$$\mu_2 = \sigma^2 \tag{4}$$

である。

その他、m_k と μ_k の間には

$$\begin{aligned}\mu_2 &= m_2 - {m_1}^2\\ \mu_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2{m_1}^3\\ \mu_4 &= m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2{m_1}^2 - 3{m_1}^4\end{aligned}$$

などの関係がある。より一般には

$$\mu_k = m_k - {}_kC_1m_{k-1}m_1 + {}_kC_2m_{k-2}{m_1}^2 - {}_kC_3m_{k-3}{m_1}^3 + (-1)^r\,{}_kC_rm_{k-r}{m_1}^{k-r} + \cdots + (-1)^k\,{m_1}^k \tag{5}$$

となる。

1.2　モーメント母関数

確率分布 F に従う確率変数 X について、$g(X) = \exp(tX)$ の期待値

$$E\left[e^{tX}\right] = \begin{cases}\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{tx}p(x)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx\end{cases}$$

は t の関数となる。この関数を $M_F(t)$ もしくは $M_X(t)$ と記して、確率分布 F のモーメント母関数、あるいは確率変数 X のモーメント母関数という。モーメント母関数の定義域は $t \in \mathcal{R}$ とは限らないことに注意しておく。

モーメント母関数の性質には次のようなものがある。

1. a と b を定数として、確率変数 $Y = aX + b$ のモーメント母関数は $M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$ で与えられる。

h

表 1: モーメント母関数が計算できる確率分布

確率分布	モーメント母関数
二項分布	$\{pe^t + 1 - p\}^n$
幾何分布	$pe^t / (1 - (1 - p) e^t)$
ポアソン分布	$\exp\{\lambda(\exp(t) - 1)\}$
負の二項分布	$p^k (1 - (1 - p) e^t)^{-k}$
一様分布	$\left(e^{bt} - e^{at}\right) / \{(b - a) t\}$
指数分布	$(1 - \lambda t)^{-1}$
正規分布	$\exp\left(\mu t + \sigma^2 t^2/2\right)$
カイ２乗分布	$(1 - 2t)^{-k/2}$
ガンマ分布	$(1 - \beta t)^{-\alpha}$
離散一様分布	$\sum_{k=1}^{n} e^{kt}/n$

2. $M_X(t)$ が原点を含むある範囲で存在するとき、この原点周りのテイラー展開

$$M_X(t) = 1 + \frac{M_X{}'(0)}{1!}t + \frac{M_X{}''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{M_X{}^{(k)}(0)}{k!}t^k \cdots \tag{6}$$

の全ての導関数が存在し、しかも

$$M_X{}^{(k)}(0) = E\left[X^k\right] \tag{7}$$

となる。

モーメント母関数が解析的な表現を持つ確率分布はあまり多くはなく、それぞれに計算手順を覚えられるほどである。

1.3　キュムラント母関数とキュムラント

モーメント母関数の対数を、キュムラント母関数といい、$K_X(t)$ と記す。

$$\begin{aligned} K_X(t) &= \log M_X(t) \\ &= \log E\left[e^t X\right] \end{aligned}$$

キュムラント母関数の原点周りのテイラー展開

$$K_X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\kappa_n \tag{8}$$

の展開係数

$$\kappa_k = \frac{\partial^k}{\partial t^k} K_X(t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \log M_X(t) \tag{9}$$

を k 次のキュムラントという。キュムラントはモーメントに比べて、アフィン変換に関する計算が単純になるが、この講義では特に触れないでおく。

1.4　特性関数

確率分布の特性関数とは

$$\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] \tag{10}$$

表 2: 特性関数が計算できる確率分布

確率分布	特性関数
二項分布	$\left\{pe^{it}+1-p\right\}^{n}$
幾何分布	$pe^{t}/\left(1-(1-p)\,e^{it}\right)$
ポアソン分布	$\exp\left\{\lambda\left(e^{it}-1\right)\right\}$
負の二項分布	$p^{k}\left(1-(1-p)\,e^{it}\right)^{-k}$
一様分布	$\left(e^{ibt}-e^{iat}\right)/\left\{(b-a)\,it\right\}$
指数分布	$(1-i\lambda t)^{-1}$
正規分布	$\exp\left(i\mu t-\sigma^{2}t^{2}/2\right)$
カイ 2 乗分布	$(1-i2t)^{-k/2}$
ガンマ分布	$(1-i\beta t)^{-\alpha}$
離散一様分布	$\sum_{k=1}^{n}e^{ikt}/n$

で定義される。

$$E\left[e^{itX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f\,(x)\,dx \tag{11}$$

より、確率分布 F が確率密度関数 $f\,(x)$ を持つ場合には、特性関数 $\varphi\,(t)$ は $f\,(x)$ のフーリエ変換に他ならない。

確率分布がモーメント母関数 $M_X\,(t)$ を持つ場合、特性関数の定義域を複素平面に拡張できて、そのモーメント母関数は

$$M_X\,(t)=\varphi_X\,(-it) \tag{12}$$

という表現を持つ。この関係から、特性関数からも (原点) モーメントを求めることができる。

$$m_k=E\left[X^k\right]=(-1)^k\,\varphi_X{}^{(k)}\,(0) \tag{13}$$

ただし φ は、F のモーメントが k 次までしか存在しないときは、k 回しか微分可能ではない点に注意する。

特性関数には他に、積分可能であれば逆フーリエ変換で密度関数が得られる

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X\,(t)\,dt=f_X\,(x) \tag{14}$$

という性質もある。

特性関数が解析的に取扱い易い確率分布もあまり多くはない。モーメント母関数が存在する確率分布であれば、t を it で置き換えて得ることができる。