確率論 (*Probability Theory*) 第 16 週 期末試験

w.yamamoto

期末試験問題

結果のみでなく、計算過程も読み取れるように解答すること。 数値を答える問いには、有効桁数 3 桁で答えよ。分数は約分してもよいか、複数の分数を回答する場合には、分母は最小公倍数のままでもよい。

1. 確率変数 X_1 の累積分布関数 $F_1(x) = Pr[X_1 \le x]$ を

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \le x < 1) \\ 1 & (1 \le x) \end{cases} \tag{1}$$

X_2 の累積分布関数 $F_2(x) = Pr[X_2 \le x]$ を

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1/2 & (0 \le x < 1/2) \\ 1 & (1/2 \le x) \end{cases} \tag{2}$$

とする。また、(X_1 とも X_2 とも異なる別の) 確率変数 X は

$$G(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x) \tag{3}$$

という累積分布関数をもつ確率分布に従うとする。これら 3 つの確率変数 X_1、X_2、X について、以下の問いに答えよ。

1-1 X_1 について、

1-1-a 次の 4 つの確率を求めよ。(5 点)

$$Pr[0 < X_1 < 1/2],\ Pr[0 \le X_1 < 1/2],\ Pr[0 < X_1 \le 1/2],\ Pr[0 \le X_1 \le 1/2]$$

1-1-b 平均 $E[X_1]$ と 2 次モーメント $E\left[X_1^2\right]$ を求めよ。(各 5 点)

1-2 X_2 について、

1-2-a 次の 4 つの確率を求めよ。(5 点)

$$Pr[0 < X_2 < 1/2],\ Pr[0 \le X_2 < 1/2],\ Pr[0 < X_2 \le 1/2],\ Pr[0 \le X_2 \le 1/2]$$

1-2-b 平均 $E[X_2]$ と 2 次モーメント $E\left[X_2^2\right]$ を求めよ。(各 5 点)

1-3 X について、

1-3-a 平均 $E[X]$ と分散 $V[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2$ を求めよ。(各 5 点)

1-3-b 上で求めた分散 $V[X]$ を最大にする α と最小にする α を求めよ。(10 点)

2. 確率変数 X_1 はパラメータが α と β_1 のガンマ分布に従い、確率変数 X_2 はパラメータが α と β_2 のガンマ分布に従い、X_1 と X_2 は互いに独立とする。ガンマ分布の確率密度関数は、任意の実数 x について

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

で与えられるものとする。また $Y = X_1 + X_2$ とする。このとき、次の問いに答えよ。(なお、下記の問いは必ずしも、この順序でないと答えられない訳ではないことは、予め注意しておく)

2-1 X_1 の期待値を計算せよ。(5 点)

2-2 X_1 のモーメント母関数を求めよ。(5 点)

2-3 Y のモーメント母関数を求めよ。(5 点)

2-4 Y が従う確率分布の確率関数を答えよ。(5 点)

2-5 X_1 と X_2 の同時確率関数を記せ。(5 点)

2-6 $Y = a$ となる確率を 2-4 で答えた確率関数を用いて表せ。(5 点)

2-7 $X_1 + X_2 = a$ となる確率を 2-5 で答えた同時確率関数を用いて表せ。(5 点)

2-8 $Y = X_1 + X_2 = a$ の条件の下で、X_1 と X_2 が従う条件付き同時確率関数を記せ。(5 点)

3. モーメント母関数が

$$M_X(t) = \left(e^t - 1\right)^2 / t^2$$

となる確率分布 F か、

$$M_X(t) = \frac{e^{2t} - e^t}{t}$$

となる確率分布 G のどちらかにつき、以下の問いに答えよ。

3-1 この確率分布の平均を求めよ。(5 点)

3-2 この確率分布の分散を求めよ。(5 点)

4. 「$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に、確率密度関数 f と確率分布関数 F をもつ共通の確率分布に従う。この確率分布の期待値は μ、分散は σ^2 である。」との設定の下で、大数の法則を説明せよ。(10 点)

5. 「$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に、確率密度関数 f と確率分布関数 F をもつ共通の確率分布に従う。この確率分布の期待値は μ、分散は σ^2 である。」との設定の下で、中心極限定理を説明せよ。(10 点)

6. ベルヌーイ試行と二項分布と幾何分布と負の二項分布の関係を、可能な限り親切かつ丁寧に、数式も交えて解説せよ。ただし、それぞれの分布の確率関数は

$$\begin{array}{cc}
\text{ベルヌーイ試行} & p^x (1-p)^{1-x} \\
\text{二項分布} & \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
\text{幾何分布} & p(1-p)^x \\
\text{負の二項分布} & \dfrac{(k+x-1)!}{x!\,(k-1)!} p^k (1-p)^x
\end{array} \tag{4}$$

のはずである。(15 点)

7. 任意の 2 つの確率変数 X, Y に関するコーシー・シュワルツの不等式

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E\left[|X|^2\right]} \sqrt{E\left[|Y|^2\right]} \tag{5}$$

から、

$$Cov(X, Y) \leq \sqrt{Var(X)} \sqrt{Var(Y)} \tag{6}$$

を導け。(10 点)

確率論 (*Probability Theory*) 第 16 週 期末試験

w.yamamoto

期末試験問題

結果のみでなく、計算過程も読み取れるように解答すること。 数値を答える問いには、有効桁数３桁で答えよ。分数は約分してもよいか、複数の分数を回答する場合には、分母は最小公倍数のままでもよい。

1. ２つの確率変数 X と Y が互いに独立である場合に、各項目につき、現れる数式の間の関係を、勿論数式を用いて回答せよ。(各 2.5 点)

1-1 条件付き累積確率 $Pr\left[X \le x | Y \le y\right]$ と周辺累積確率 $Pr\left[X \le x\right]$

1-2 条件付き確率 $Pr\left[X = x | Y = y\right]$ と周辺確率 $Pr\left[X = x\right]$

1-3 条件付き密度 $f_{X|Y}(x|y)$ と周辺密度 $f_X(x)$

1-4 同時累積確率 $Pr\left[X \le x\, Y \le y\right]$ と周辺累積確率 $Pr\left[X \le x\right]$ および $Pr\left[Y \le y\right]$

1-5 同時確率 $Pr\left[X = x\, Y = y\right]$ と周辺確率 $Pr\left[X = x\right]$ および $Pr\left[Y = y\right]$

1-6 同時密度関数 $f_{XY}(x, y)$ と周辺密度関数 $f_X(x)$ および $f_Y(y)$

1-7 和のモーメント母関数 $M_{X+Y}(t)$ と周辺モーメント母関数 $M_X(t)$ および $M_Y(t)$

1-8 積の期待値 $E\left[h_1(X)\, h_2(Y)\right]$ と周辺期待値 $E\left[h_1(X)\right]$ および $E\left[h_2(Y)\right]$

2. 確率変数 X_1 はパラメータが λ_1 のポアソン分布に従い、確率変数 X_2 はパラメータが λ_2 のポアソン分布に従い、X_1 と X_2 は互いに独立とする。ポアソン分布の確率関数は、非負の整数 x について

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

で与えられるものとする。また $Y = X_1 + X_2$ とする。このとき、次の問いに答えよ。(なお、下記の問いは必ずしも、この順序でないと答えられない訳ではないことは、予め注意しておく) (各 5 点, 2-9 のみ 10 点)

2-1 X_1 の期待値を計算せよ。

2-2 X_1 のモーメント母関数を求めよ。

2-3 Y のモーメント母関数を求めよ。

2-4 Y が従う確率分布の確率関数を答えよ。

2-5 X_1 と X_2 の同時確率関数を記せ。

2-6 $Y = k$ となる確率を、**2-4** で答えた確率関数を用いて表せ。

2-7 $X_1 + X_2 = k$ となる確率を、**2-5** で答えた同時確率関数を用いて表せ。

2-8 $Y (= X_1 + X_2) = k$ の条件の下で、X_1 と X_2 が従う条件付き同時確率関数を記せ。

2-9 $Y = k$ の条件の下での、X_1 の期待値を求めよ。

3. 正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

のはずである。確率変数 X が上の正規分布に従うとする。(各 5 点、3-4 のみ 10 点)

3-1 正規分布の期待値 μ の計算過程を記せ。

3-2 正規分布の期待値 σ^2 の計算過程を記せ。

3-3 正規分布のモーメント母関数を導け。

3-4 $Y = aX + b$ の期待値を上の密度関数に関する積分表現で丁寧に導け。$E[aX+b] = a[X] + b$ という関係は用いてはいけない。

4. 指数分布とポアソン分布の関係を、可能な限り親切かつ丁寧に、数式も交えて解説せよ。ただし、それぞれの分布の確率密度関数と確率関数は

$$\begin{array}{ll} \text{指数分布} & \lambda e^{-\lambda x} \\ \text{ポアソン分布} & \frac{(n\lambda)^x}{x!} e^{-n\lambda} \end{array} \tag{7}$$

のはずである。(10 点)

5. 「$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に、確率密度関数 f と確率分布関数 F をもつ共通の確率分布に従う。この確率分布の期待値は μ、分散は σ^2 である。」との設定の下で、大数の法則を説明せよ。(10 点)

6. 「$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立に、確率密度関数 f と確率分布関数 F をもつ共通の確率分布に従う。この確率分布の期待値は μ、分散は σ^2 である。」との設定の下で、中心極限定理を説明せよ。(10 点)

7. 任意の 2 つの確率変数 X, Y に関するコーシー・シュワルツの不等式

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E\left[|X|^2\right]}\sqrt{E\left[|Y|^2\right]} \tag{8}$$

から、

$$Cov(X, Y) \leq \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)} \tag{9}$$

を導け。(10 点)