28 avril 2011
PROB #4

確率論 (*Probability Theory*) 第 4 週

w.yamamoto

1　課題の略解

#1-1　参考書の問題 1.6 を参考に、条件付き確率の計算に関してベイズの定理を用いる、次の問いに答えよ。青色の袋が 3 つ、赤色の袋が 2 つ、黄色の袋が 1 つある。これらの袋の中には、赤玉と白玉がそれぞれ表に書かれた個数だけ、入っている。例えば、赤玉が 2 個、白玉が 3 個入った、青色の袋が 3 つある、ということである。

	青袋	赤袋	黄袋
赤玉	2 個	1 個	4 個
白玉	3 個	4 個	1 個

(1) このとき、目隠しをされた状態で、まず合計 6 つの袋から無作為に 1 つの袋を選ぶ。まずこの状態で、これ以上の情報は得られていないとして、選んだ袋が青色である確率、赤色である確率、黄色である確率、をそれぞれ求めよ。

(2) 次に、目隠しをされたまま、選ばれた袋に手を入れ、中を見ずに 1 個の玉を取り出したら、白玉だったと教えられた。これ以上の情報は得られていない状態で、選んだ袋が青色である確率、赤色である確率、黄色である確率、をそれぞれ求めよ。

(1) 袋の選ばれる確率は

$$\Pr[\text{青袋}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \Pr[\text{赤袋}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \Pr[\text{黄袋}] = \frac{1}{6} \tag{1}$$

(2) 袋から玉を取り出したら白玉だったときの、手にしている袋が各色である確率は、ベイズの定理から

$$\Pr[\text{青袋} \mid \text{白玉}] = \frac{\Pr[\text{青袋\&白玉}]}{\Pr[\text{白玉}]} \tag{2}$$

ここで

$$\Pr[\text{青袋\&白玉}] = \Pr[\text{青袋}]\Pr[\text{白玉} \mid \text{青袋}], \quad \Pr[\text{白玉}] = \Pr[\text{青袋}]\Pr[\text{白玉} \mid \text{青袋}] + \Pr[\text{赤袋}]\Pr[\text{白玉} \mid \text{赤袋}] + \Pr[\text{黄袋}]\Pr[\text{白玉} \mid \text{黄} \tag{3}$$

より、それぞれ

$$\Pr[\text{青袋\&白玉}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}, \quad \Pr[\text{白玉}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9+8+1}{30} = \frac{3}{5} \tag{4}$$

と求まることから、$\Pr[\text{青袋} \mid \text{白玉}] = 1/2$ を得る。同様に、

$$\Pr[\text{赤袋\&白玉}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}, \quad \Pr[\text{黄袋\&白玉}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \tag{5}$$

を用いて

$$\Pr[\text{赤袋} \mid \text{白玉}] = \frac{4}{9} \Pr[\text{黄袋} \mid \text{白玉}] = \frac{1}{18} \tag{6}$$

を得る。

#1-2　独立性について、以下の問題に答えよ。

(1) 1 組 52 枚のトランプカードセットを、裏を上にした状態でよく切り、裏にしたまま、1 枚のカードを引く試行を考える。マークがスペードである事象を S、数字が $\{10, J, Q, K, A\}$ である事象を H として、この二つの事象は互いに独立かどうか、同時確率や条件付き確率を求めて調べよ。

(2) いかさまや仕込みのない 6 面の賽子を 1 回振る試行を考える。出た目が 2 の倍数である事象を E、出た目が 3 の倍数である事象を T として、この二つの事象は互いに独立かどうか、同時確率や条件付き確率を求めて、調べよ。

(3) (2) につき、いかさまや仕込みのない 7 面の賽子ではどうか、同様に調べよ。

この問題はすべて、二つの事象 A、B が互いに独立であれば

$$\Pr[A\&B] = \Pr[A]\Pr[B], \quad \Pr[A|B] = \Pr[A], \quad \Pr[B|A] = \Pr[A] \tag{7}$$

が成り立つので、上記の関係を確かめるだけでよい。
(1) $\Pr[S] = 1/4, \Pr[H] = 20/52 = 5/13, \Pr[S\&H] = 5/52$ より

$$\Pr[S\&H] = \frac{5}{52} = \Pr[S]\Pr[H], \quad \Pr[S|H] = \frac{5}{52}\Big/\frac{1}{4} = \frac{5}{13} = \Pr[S], \quad \Pr[H|S] = \frac{5}{52}\Big/\frac{5}{13} = \frac{1}{4} = \Pr[H] \tag{8}$$

など、いずれによっても独立性を確認できる。
(2) $\{E\&T\}$ は 6 のみであることに留意すれば、$\Pr[E] = 3/6 = 1/2, \Pr[T] = 2/6 = 1/3, \Pr[E\&T] = 1/6$ より

$$\Pr[E\&T] = \frac{1}{6} = \Pr[E]\Pr[T], \quad \Pr[E|T] = \frac{1}{6}\Big/\frac{1}{3} = \frac{1}{2} = \Pr[E], \quad \Pr[T|E] = \frac{1}{6}\Big/\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \Pr[T] \tag{9}$$

など、いずれによっても独立性を確認できる。
(2) $\{E\&T\}$ は 6 のみであることに留意すれば、$\Pr[E] = 3/7, \Pr[T] = 2/7, \Pr[E\&T] = 1/7$ より

$$\Pr[E\&T] = \frac{1}{7} \neq \Pr[E]\Pr[T], \quad \Pr[E|T] = \frac{1}{7}\Big/\frac{2}{7} = \frac{1}{2} \neq \Pr[E], \quad \Pr[T|E] = \frac{1}{7}\Big/\frac{3}{7} = \frac{1}{3} \neq \Pr[T] \tag{10}$$

など、いずれによっても独立でないことが確認できる。
#1-3 自分の身の回りにある、確率論がなかったら、開発されてなかったり、今提供されている機能や性能を実現できていないであろうと思われる、物や製品を探し、根拠と共に紹介せよ。
何か、確率論を使っていれば良いです。
#1-4 天気予報を詳細に行うことを考える。互いに排反な気象状況をできるだけ多く、列挙せよ。
10 種類以上は欲しいかな。