確率論 (*Probability Theory*) 第 10 週 中間試験 (追加試験)

w.yamamoto

1 中間試験問題 (追加試験)

解答用紙は最初から 2 枚を受け取り、名前・学籍番号を必ず記入しておくこと。大問の解答順序は自由でよい。答案提出時には、使わなかった解答用紙も提出してよい。

1. 3 つの確率変数 A, B, C につき、以下の同時確率分布表がある。これに関する以下の問いに答えよ。問いの中で「という情報を得た」とは「という条件を与えられた」と読み替えてよい。また後半は、得失を確率変数の値と考える、あるいは得失は A と B と C の関数と考える、とよい。

表 1 確率変数 A, B, C についての同時確率表と得失

A	B	C	確率	得失
0	0	0	3/20	10
0	0	1	5/20	-10
0	1	0	2/20	0
0	1	1	1/20	-20
1	0	0	3/20	20
1	0	1	1/20	0
1	1	0	3/20	10
1	1	1	2/20	-10

右表は、$A = 0, B = 0, C = 0$ となる確率は 3/20 でこのとき 10 の得をする、$A = 0, B = 0, C = 1$ となる確率は 5/20 でこのとき -10 の損をする、などと読む。

1. 得失の期待値を求めよ。
2. $C = 1$ という情報を得たときの、A と B の組み合わせ、についての条件付き確率表を作成せよ。
3. B のみ、についての条件付き確率表を作成せよ。
4. $A = 1$ という情報を得たときの、B のみ、についての条件付き確率表を作成せよ。
5. $C = 1$ という情報のみを得たときの、得失 の条件付き期待値を求めよ。(A および B については何も得られていない)

2. 次の関係式を、密度関数 $f(x)$ をもつ確率分布 F に関する確率変数の関数 $g(X)$ の期待値の定義

$$E_X[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

から導け。なおこの問いでは原点モーメントと中心モーメントをそれぞれ

$$m_k = E\left[X^k\right]$$
$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right]$$

と記す。また確率分布の平均を μ、分散を σ^2 と記すと、$m_1 = \mu$、$\mu_2 = \sigma^2$ となるが、m_1 は必ず μ と、μ_2 は必ず σ^2 とそれぞれ記すこと。

1. $\sigma^2 = m_2 - \mu^2$

2. $Var[aX+b] = a^2\sigma^2$

3. $E\left[(X-\mu)^3\right] = m_3 - 3m_2\mu + 2\mu^3$

3. 次の関係式を、密度関数 $f(x)$ をもつ確率分布 F に関する確率変数の関数 $g(X)$ の期待値の定義

$$E_X[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx$$

から導け。なおこの問いでは原点モーメントと中心モーメントをそれぞれ

$$m_k = E\left[X^k\right]$$
$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right]$$

と記す。また確率分布の平均を μ、分散を σ^2 と記すと、$m_1 = \mu$、$\mu_2 = \sigma^2$ となるが、m_1 は必ず μ と、μ_2 は必ず σ^2 とそれぞれ記すこと。

1. $\sigma^2 = m_2 - \mu^2$

2. $Var[aX+b] = a^2\sigma^2$

3. $E\left[(X-\mu)^3\right] = m_3 - 3m_2\mu + 2\mu^3$

4. モーメント母関数が

$$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)\,t}$$

となる確率分布 F につき、以下の問いに答えよ。

1. この確率分布の平均を求めよ。

2. この確率分布の分散を求めよ。

5. 確率変数 X の期待値 $E[X]$ を μ 、分散 $Var[X]$ を σ^2 と書く。X は累積分布関数が $F(x) = x$ の確率分布に従っているとする。ただし確率分布の定義域は $[0,]$ である。また X が非負の確率変数のときのみ成立するマルコフの不等式

$$Pr[X \geq a] \leq \frac{\mu}{a}$$

と、X が非負でなくとも成立するチェビシェフの不等式

$$Pr[|X-\mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

を掲げておく。このとき、以の問いに答えよ。

1. X の期待値と分散を求めよ。

2. マルコフの不等式をこの分布に適用し、累積分布関数 $F(x) = Pr[X \leq x]$ に関する不等式を導け。そして $F(x)$ と比較検討せよ。

3. この確率分布の下での $Pr[|X-\mu| \geq a]$ を導き、チェビシェフの不等式と比較検討せよ。

6. 確率ベクトル (X,Y) の同時確率密度関数を $f(x,y)$、X および Y の標本空間は実数全体 $\mathcal{R}$ とする。また、X および Y それぞれの周辺分布の確率密度関数を $f_X(x)$、$f_Y(y)$ とし、それぞれのモーメント母関数を $M_X(s), M_Y(t)$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

1. $X+Y$ が従う確率分布の密度関数はどのような計算で導けるか、その導出過程を示せ。

2. $X+Y$ が従う確率分布のモーメント母関数が $M_X(t)\,M_Y(t)$ となるための条件を述べよ。