11 juillet 2013
PROB #12

確率論 (*Probability Theory*) 第 12 週 ポアソン分布と指数分布とガンマ分布

w.yamamoto

1 確率分布に関する計算

特定の確率分布に関する計算を問う目的は、その確率分布を扱えることを確認するところにある。

1. モーメントの計算 (期待値の直接計算、モーメント母関数からの導出、など)
2. モーメント母関数の導出 (直接計算、他の分布からの誘導など)
3. 和の分布 (たたみ込みから直接導出、モーメント母関数からの導出、など)
4. 確率変数の関数 (変換) の分布
5. 条件付き分布、条件付き密度、ハザード関数 (ごくたまに)
6. その他 (中心極限定理の適用、近似式の導出・適用など)

2 ポアソン分布

ポアソン分布は、繰り返し発生する事象が、与えられた時間内に発生する回数の確率分布である。この分布の確率関数は

$$Pr\left[X = k\right] = \frac{\lambda^k}{k!}\exp\left(-\lambda\right) \tag{1}$$

で与えられる。ポアソン分布を用いる際には、上の式が

1. 独立性：事象の発生は互いに独立かつ、過去の発生履歴とは無関係
2. 定常性：事象の発生確率は時点 (時間帯) によって変化しない
3. 希少性：微小時間に 2 回以上の起こる確率は無視できる

の 3 つの仮定に基づいて導出されていることを、忘れてはならない。

ポアソン分布に関する確率や期待値の計算には、$\exp(\lambda)$ のマクローリン展開 ($\lambda = 0$ の回りでのテイラー展開)

$$\exp\left(\lambda\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{2}$$

と、全確率に関する次の関係式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} Pr\left[X = k\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1\end{aligned} \tag{3}$$

が用いられる。

X の期待値は

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^{l}}{(l)!}, \quad (l = k-1) \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \qquad (4)
\end{aligned}
$$

と先の関係式を覚えていれば、用いるだけである。一箇所、総和をとる変数を「ずらす」のは 2 項分布に関する計算に似ている。

X の分散も、2 項分布と同様である。定義

$$V[X] = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 \qquad (5)$$

から分散を直接計算するのでも、2 乗の平均 $E\left[X^2\right] = m_2$ と平均 $E[X] = m_1$ の 2 乗 $m_1{}^2$ を求めるのでもなく、少し巧妙に、

$$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 \qquad (6)$$

という関係式を用いる。k^2 をかけて総和を求めるより、$k(k-1)$ をかけた総和を求める方が、階乗 $(k! = k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1)$ に馴染みやすく、計算が簡単になる。

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{n} \frac{\lambda^{l}}{(l)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

より、

$$V[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad (8)$$

を得る。

モーメント母関数は定義通りに計算するが、

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\exp(Xt)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^t\right)^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

と途中で、指数関数の原点回りのテイラー展開を思い出して、下の表現に戻すことで、導出できる。

たまに

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \quad = \quad e^{-\lambda} \tag{10}$$

という極限も知っている必要があるかもしれない。

3　指数分布

指数分布は、ランダムな到着間隔の確率分布、あるいは待ち時間の分布、として用いられることが多い。オペレーションズリサーチで待ち行列というトピックを学ぶ際にも、M/M/1 という基本的なモデルの到着間隔と処理時間の確率分布として紹介される。

確率密度関数

$$f(x) = \frac{d}{dx}(1-\exp(-\lambda x)) = ? \tag{11}$$

累積分布関数

$$F(k) = Pr[X \le k] = 1-\exp(-\lambda x) \tag{12}$$

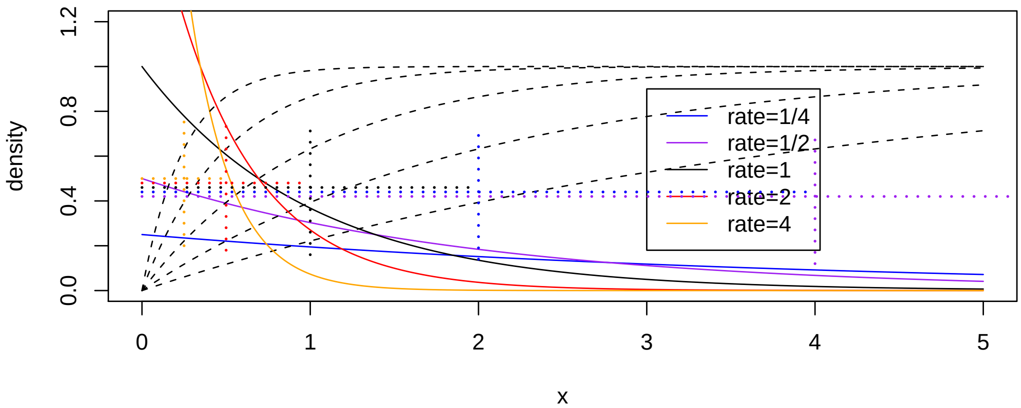

図 13 指数分布の累積分布関数と確率密度関数

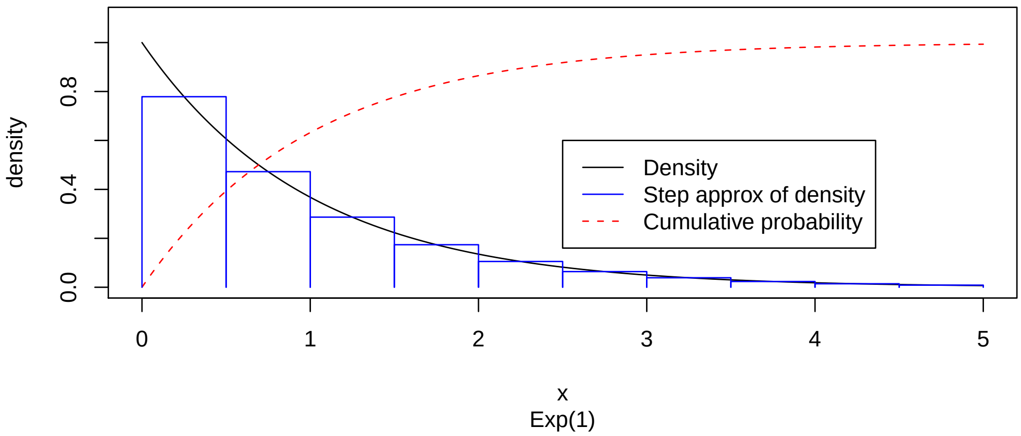

図 14 $\lambda = 1$ の指数分布の累積分布関数と確率密度関数

X の期待値 (= X の平均)

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x) = ? \tag{13}$$

X^2 の期待値 (= X^2 の平均)

$$E\left[X^2\right] = \int_0^\infty x^2 f(x) = ? \tag{14}$$

X の分散 (= X^2 の平均 - X の平均の二乗)

$$V[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = ? \tag{15}$$

指数分布に関しては、パラメータを λ とする記法の他に、次のように $\mu = 1/\lambda$ をパラメータに用いる記法も用いられる。

確率密度関数

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)\right) = ? \tag{16}$$

累積分布関数

$$F(k) = Pr[X \le k] = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \tag{17}$$

指数分布の期待値の計算は、指数関数の積分

$$\int e^a x dx = e^{ax}/a + C \tag{18}$$

と、部分積分

$$\int_{x\in X} g(x) e^x dx = [e^x g(x)]_{x\in X} - \int_{x\in X} g'(x) e^x dx \tag{19}$$

の組み合わせ、あるいは繰り返しで乗り切れる。例えば X の期待値の計算は、

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[x\left(-e^{-\lambda x}\right)\right]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-\lambda x}\right) dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^\infty \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned} \tag{20}$$

となる。ここで $x\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda x}$ の $x \to \infty$ の極限は、$x \to \infty$ よりも速く $e^{-\lambda x} \to 0$ となることから 0 になるのは、既知とする。

2 乗の期待値は、途中で X の期待値の $2/\lambda$ 倍になったことに気づけば、そこで計算はおしまい。

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[x^2\left(-e^{-\lambda} x\right)\right]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty \left(-2xe^{-\lambda x}\right) dx \\
&= \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{2}{\lambda} E[X] = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned} \tag{21}$$

気づかなければ、3 行目以降、部分積分をもう一度繰り返す。

$$
\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[x^2\left(-e^{-\lambda} x\right)\right]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty \left(-2xe^{-\lambda x}\right) dx \\
&= 0 - 0 + \in_0^\infty 2xe^{-\lambda x} dx \\
&= \left[2x \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^\infty - \int_0^\infty 2 \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^\infty 2 \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[\frac{2}{\lambda} \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^\infty \\
&= 0 - \frac{-2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

いずれにせよ、分散は次のように求まる。

$$
V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (23)
$$

指数分布のモーメント母関数は

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left[e^{tx}\right] = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx \\
&= \lambda \left[\frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\right]_0^\infty \\
&= \lambda \left[\frac{1}{t-\lambda} \lim_{x\to\infty} e^{(t-\lambda)x} - \frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)0}\right] \\
&= \lambda \left[\frac{1}{t-\lambda} \lim_{x\to\infty} e^{(t-\lambda)x} - \frac{1}{t-\lambda}\right] \qquad (24)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $t - \lambda = 0$ のとき分母が 0 、$t - \lambda > 0$ ならば極限が ∞ に発散となるので、$t \geq \lambda$ の範囲ではモーメント母関数は存在しない。$t - \lambda < 0$ のとき、$\exp(t - \lambda) x$ で $x \to \infty$ とすると 0 に収束するので、

$$
M_X(t) = \frac{\lambda}{t-\lambda}(0-1) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \qquad (25)
$$

を得る。

4　ガンマ分布

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ は、確率密度関数を

$$
f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0 \qquad (26)
$$

とする、$(0, \infty)$ 上の連続確率分布である。これは (完全) ガンマ関数

$$
\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (27)
$$

から定まる確率分布である。左辺の積分が有限の範囲 $(0, s)$ のとき、この積分を不完全ガンマ関数と言う。

ガンマ分布の平均は

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty xf(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

と求まる。分散は、X^2 の期待値から求める。

$$
\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x^2\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
V[X] &= E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

を得る。

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ のモーメント母関数は

$$
\begin{aligned}
M_{\Gamma(\alpha,\beta)}(t) &= E_{\Gamma(\alpha,\beta)}[\exp(tX)] \\
&= \int_0^\infty e^{tx}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\frac{1}{\beta-t}du \quad \text{ここで } u=(\beta-t)x\,,\ x=u/(\beta-t) \text{ と変数変換} \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\beta-t}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta-t}\right)^{\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha \qquad (31)
\end{aligned}
$$

となる。

ガンマ分布の累積分布関数は、α が正の整数の場合は陽な表現を得ることができる。第 1 種不完全ガンマ関数を $\gamma(\alpha,x)$ と置く。

$$
\gamma(\alpha,x) = \int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad (32)
$$

部分積分を用いると第 1 種不完全ガンマ関数の間には、

$$
\begin{aligned}
\gamma(1,x) &= 1-e^{-x} \qquad (33) \\
\gamma(\alpha+1,x) &= \alpha\gamma(\alpha,x) - x^\alpha e^{-x}
\end{aligned}
$$

という関係が成り立つことが分かる。第 2 種不完全ガンマ関数の間にも同様の関係が成り立つ。

この関係を用いると、α が自然数 k で、$\beta = 1$ の場合に、$\Gamma(n) = (n-1)!$ などを用いて

$$1 - F_{\Gamma(k,1)}(x) = \exp(-x)\left\{1 + \frac{x}{1!} + \cdots + + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \tag{34}$$

が示せる。同様に β が任意の正の実数の場合にも、

$$1 - F_{\Gamma(k,\beta)}(x) = \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}$$

が示せる。よって、α が整数 k の場合のガンマ分布の累積分布関数は

$$F_{\Gamma(k,\beta)}(x) = 1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \tag{35}$$

となる。

5　分布間の関係

5.1　指数分布とポアソン分布

ある事象の発生間隔 X_i が互いに独立な指数分布 $Exp(\lambda)$ に従っているとする。このとき期間 T の間にその事象が発生する回数 Z は、どのような確率分布に従うかを考える。[1]

ここでの標本空間は

$$\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{36}$$

と非負の整数全体となる。「$Z = k$」で、「期間 T の間に k 回の事象が発生する」事象を表す。一方でこの事象は、「最初の k 回の事象発生間隔の和 Y_k が T 以下、かつ次の発生回数を加えた和 Y_{k+1} は T を超える」と記しても、同じことである。

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= Pr[Y_k \le T \ \text{ and } \ Y_{k+1} > T] \\ &= F_{Y_k}(T) - F_{Y_{k+1}}(T) \\ &= F_{\Gamma(k,\lambda)}(T) - F_{\Gamma(k+1,\lambda)}(T) \end{aligned}$$

２つ目の等式の詳細はここでは省略。

ところで Y_k の確率分布は k が整数であれば、前掲の通り、ガンマ分布となる。よってこのまま計算を続ければ、

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= F_{\Gamma(k,\lambda)}(T) - F_{\Gamma(k+1,\lambda)}(T) \\ &= 1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} - \left[1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(\beta x)^k}{(k)!}\right\}\right] \\ &= \exp(-\beta x)\frac{(\beta x)^k}{(k)!} \end{aligned} \tag{37}$$

２つ目の等式は式 (35) を用いた。

5.2　指数分布とガンマ分布

ある事象の発生間隔 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立な指数分布 $Exp(\lambda)$ に従っているとする。この時 $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が従う確率分布を考える。

指数分布のモーメント母関数は、前々回の課題より

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \tag{38}$$

[1] この箇所は、参考書が p.70-71 で、ポアソン分布から指数分布を導出しているのに対して、ここでは指数分布からポアソン分布を導出をしている。両者とも、本質的には同じ議論である。

であった。すると、これらの和 Y_n が従う確率分布は

$$M_{Y_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n} \tag{39}$$

となる。これをモーメント母関数に持つ確率分布を探せば良いが、前回に講義で説明したように、モーメント母関数を求める変換の逆変換は整備されていない。しかしこれがガンマ分布のモーメント母関数であることを知っていれば、和 Y_n がガンマ分布に従うと言える。

実際、式 (39) と式 (31) を見比べると、Y_n の従う確率分布は、パラメータが $\alpha = n$、$\beta = \lambda$ のガンマ分布であることが分かる。

6 レポート課題

確率分布 F のモーメント母関数は、

$$E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k \in \mathcal{X}} \exp(tk)\, p(k) \tag{40}$$

あるいは

$$E\left[e^{tX}\right] = \int_{x \in \mathcal{X}} \exp(tk)\, f(k)\, dx \tag{41}$$

で定義される。

#11-1 二項分布の平均、分散、モーメント母関数を計算できるようにしておくこと。
#11-2 幾何分布の平均、分散、モーメント母関数を計算できるようにしておくこと。
#11-3 負の二項分布の平均、分散、モーメント母関数を計算できるようにしておくこと。
#11-4 ポアソン分布の平均、分散、モーメント母関数を計算できるようにしておくこと。
#11-5 ガンマ分布の平均、分散、モーメント母関数を計算できるようにしておくこと。

参考文献

[1] 久保木久孝 (2007)「確率・統計解析の基礎」, 朝倉書店. (教科書)

[2] 宮川雅巳 (1998)「統計技法」工系数学講座 14, 共立出版. (教科書)

[3] 永田靖 (2005)「統計学のための数学入門 30 講」科学のことばとしての数学, 朝倉書店. (講義・教科書などで、計算が追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)

[4] 藤田岳彦 (2010)「弱点克服 大学生の確率・統計」東京図書. (講義・教科書などで、計算を追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)

[5] 東京大学教養学部統計学教室・編 (1991)「統計学入門」基礎統計学 I, 東京大学出版会. (教科書)

[6] 薩摩純吉 (1989)「確率・統計」理工系の数学入門コース 7, 岩波書店. (教科書)

A マクローリン展開とテイラー展開

無限回微分可能な関数 $g(x)$ の k 階の導関数を $g^{(k)}$ とおく。まず、テイラーの公式

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} + R_n(x)(x-a)^k \tag{42}$$

を既知とする。R_n はこの式の等号が成り立つように定められる剰余項である。ロルの定理から x に依存して決まり、区間 (a, b) の値を取る関数 $c(x)$ を用いて

$$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n \tag{43}$$

と表せる。

テイラーの公式で $n \to \infty$ とせず、有限の n のまま、$x = a$ の近傍で

$$g(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a) \tag{44}$$

とすると、$g(x)$ の $x = a$ の近傍での多項式近似が得られる。ただし、この近似が良い精度を持つためには、剰余項が

$$R_n(x) = o\left((x-a)^{n-1}\right) \tag{45}$$

を満たさなければならない。

$g(x)$ のマクローリン展開は、テイラーの公式で $a - 0$ と置き、さらに $n \to \infty$ の極限

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{6}x^3 + \cdots \end{aligned} \tag{46}$$

として与えられる。マクローリン展開の展開の中心を $x = 0$ ではなく $x = a$ とすると、テイラー展開と言われる。

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= g(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{g'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{47}$$

テイラー展開やマクローリン展開は、テイラーの公式の極限であり、これら存在する条件は、テイラーの公式の剰余項が

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{48}$$

を満たすことである。