Hand out

due	3 juillet 2014
cur	3 juillet 2014
ver	0
rev	0

確率論 (*Probability*) 第 13 週

w.yamamoto

1 ガンマ分布

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ は、確率密度関数を

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0 \tag{1}$$

とする、$(0, \infty)$ 上の連続確率分布である。これは (完全) ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2}$$

から定まる確率分布である。左辺の積分が有限の範囲 $(0, s)$ のとき、この積分を不完全ガンマ関数と言う。

ガンマ分布の平均は

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned} \tag{3}$$

と求まる。分散は、X^2 の期待値から求める。

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \end{aligned} \tag{4}$$

より、

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned} \tag{5}$$

を得る。

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ のモーメント母関数は

$$\begin{aligned}
M_{\Gamma(\alpha,\beta)}(t) &= E_{\Gamma(\alpha,\beta)}[\exp(tX)] \\
&= \int_0^\infty e^{tx}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\beta-t)x}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\frac{1}{\beta-t}du \quad \text{ここで } u=(\beta-t)x\,,\ x=u/(\beta-t) \text{ と変数変換} \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\beta-t}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\beta-t}\right)^{\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha
\end{aligned} \tag{6}$$

となる。

ガンマ分布の累積分布関数は、α が正の整数の場合は陽な表現を得ることができる。第 1 種不完全ガンマ関数を $\gamma(\alpha,x)$ と置く。

$$\gamma(\alpha,x) = \int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt \tag{7}$$

部分積分を用いると第 1 種不完全ガンマ関数の間には、

$$\begin{aligned}
\gamma(1,x) &= 1-e^{-x} \\
\gamma(\alpha+1,x) &= \alpha\gamma(\alpha,x)-x^\alpha e^{-x}
\end{aligned} \tag{8}$$

という関係が成り立つことが分かる。第 2 種不完全ガンマ関数の間にも同様の関係が成り立つ。

この関係を用いると、α が自然数 k で、$\beta=1$ の場合に、$\Gamma(n)=(n-1)!$ などを用いて

$$1-F_{\Gamma(k,1)}(x) = \exp(-x)\left\{1+\frac{x}{1!}+\cdots++\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \tag{9}$$

が示せる。同様に β が任意の正の実数の場合にも、

$$1-F_{\Gamma(k,\beta)}(x) = \exp(-\beta x)\left\{1+\frac{\beta x}{1!}+\cdots++\frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\}$$

が示せる。よって、α が整数 k の場合のガンマ分布の累積分布関数は

$$F_{\Gamma(k,\beta)}(x) = 1-\exp(-\beta x)\left\{1+\frac{\beta x}{1!}+\cdots+\frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \tag{10}$$

となる。

2　指数分布とポアソン分布の関係

ある事象の発生間隔 X_i が互いに独立な指数分布 $Exp(\lambda)$ に従っているとする。このとき期間 T の間にその事象が発生する回数 Z は、どのような確率分布に従うかを考える。[1]

ここでの標本空間は

$$\mathcal{Z} = \{0,1,2,\ldots\} \tag{11}$$

[1]この箇所は、参考書が p.70-71 で、ポアソン分布から指数分布を導出しているのに対して、ここでは指数分布からポアソン分布を導出をしている。両者とも、本質的には同じ議論である。

と非負の整数全体となる。「$Z = k$」で、「期間 T の間に k 回の事象が発生する」事象を表す。一方でこの事象は、「最初の k 回の事象発生間隔の和 Y_k が T 以下、かつ次の発生回数を加えた和 Y_{k+1} は T を超える」と記しても、同じことである。

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= Pr[Y_k \le T \ \text{ and } \ Y_{k+1} > T] \\ &= F_{Y_k}(T) - F_{Y_{k+1}}(T) \\ &= F_{\Gamma(k,\lambda)}(T) - F_{\Gamma(k+1,\lambda)}(T) \end{aligned}$$

２つ目の等式の詳細はここでは省略。

ところで Y_k の確率分布は k が整数であれば、前掲の通り、ガンマ分布となる。よってこのまま計算を続ければ、

$$\begin{aligned} Pr[Z = k] &= F_{\Gamma(k,\lambda)}(T) - F_{\Gamma(k+1,\lambda)}(T) \\ &= 1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!}\right\} - \left[1 - \exp(-\beta x)\left\{1 + \frac{\beta x}{1!} + \cdots + \frac{(\beta x)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(\beta x)^k}{(k)!}\right\}\right] \\ &= \exp(-\beta x)\frac{(\beta x)^k}{(k)!} \end{aligned} \tag{12}$$

２つ目の等式は式 (10) を用いた。

3　指数分布とガンマ分布の関係

ある事象の発生間隔 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立な指数分布 $Exp(\lambda)$ に従っているとする。この時 $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が従う確率分布を考える。

指数分布のモーメント母関数は、前々回の課題より

$$M_{X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \tag{13}$$

であった。すると、これらの和 Y_n が従う確率分布は

$$M_{Y_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n} \tag{14}$$

となる。これをモーメント母関数に持つ確率分布を探せば良いが、前回に講義で説明したように、モーメント母関数を求める変換の逆変換は整備されていない。しかしこれがガンマ分布のモーメント母関数であることを知っていれば、和 Y_n がガンマ分布に従うと言える。

実際、式 (14) と式 (6) を見比べると、Y_n の従う確率分布は、パラメータが $\alpha = n$、$\beta = \lambda$ のガンマ分布であることが分かる。

参考文献

[1] 久保木久孝 (2007) 「確率・統計解析の基礎」, 朝倉書店. (教科書)

[2] 宮川雅巳 (1998) 「統計技法」工系数学講座 14, 共立出版. (教科書)

[3] 永田靖 (2005) 「統計学のための数学入門 30 講」 科学のことばとしての数学, 朝倉書店. (講義・教科書などで、計算が追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)

[4] 藤田岳彦 (2010) 「弱点克服 大学生の確率・統計」 東京図書. (講義・教科書などで、計算を追えないところが見つかった時、それを尋ねるつもりで開くと助けてくれる本)

[5] 東京大学教養学部統計学教室・編 (1991) 「統計学入門」基礎統計学 I, 東京大学出版会. (教科書)

[6] 薩摩純吉 (1989) 「確率・統計」理工系の数学入門コース 7, 岩波書店. (教科書)