

due	17 juillet 2014
cur	17 juillet 2014
ver	1
rev	1

1 確率分布の計算に関する問題集

確率分布についての計算に関するミニテストでは「最初の確率論の講義で登場する一次元の確率分布に関して、その平均、分散、モーメント母関数を計算でき、またその独立な和の分布が導出できること」を確認する。以下には、また今年度の 3 回目のミニテストの出題範囲とは必ずしも一致しない問題もあるが、1 次元の確率分布に関する計算問題を課すとしたら、例えばこのようなテンプレートをを用いるとして作成した出題例である。実際のミニテストには必ず、確率関数もしくは確率密度関数は記載している。

1.1 テンプレート 1: 離散分布

1. この問題は離散確率分布に関する問題である。次の確率関数

$$p(x) = \dots \quad (1)$$

を持つ確率分布 F につき、下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) 確率分布 F の期待値を求めよ。
- (2) 確率分布 F の分散を求めよ。
- (3) 確率分布 F のモーメント母関数を求めよ。
- (4) 確率分布 F に互いに独立に従う 2 つの確率変数を X_1, X_2 とする。これらの和 $X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数を求めよ。
- (5) (4) で求めたモーメント母関数を持つ確率分布の確率関数を記せ。(これは答えのみで構わない)

講義内容に対応させると、このテンプレートの「 \dots 」には、「ベルヌーイ分布」「二項分布」「幾何分布」「負の二項分布」「ポアソン分布」の確率関数が入り得る。また計算量が増えるが、(4) 以降を

(4') 確率分布 F に互いに独立に従う 2 つの確率変数を X_1, X_2 とする。畳み込み

$$p_z(z) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) p(z-x) \quad (2)$$

によって $X_1 + X_2$ が従う確率分布の確率関数を求めよ。

- (5') (4') で求めた確率関数から、これを持つ確率分布のモーメント母関数を導け。
- (6') (3) で求めた確率分布のモーメント母関数から $X_1 + X_2$ の和の分布のモーメント母関数を求め、(5) の解と一致することを確認せよ。

とするバリエーションも考えられる。

1.2 テンプレート 2: 連続分布

2. この問題は連続確率分布に関する問題である。次の確率密度関数

$$f(x) = \dots \quad (3)$$

を持つ確率分布 F につき、下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) 確率分布 F の期待値を求めよ。
- (2) 確率分布 F の分散を求めよ。
- (3) 確率分布 F のモーメント母関数を求めよ。
- (4) 確率分布 F に互いに独立に従う 2 つの確率変数を X_1, X_2 とする。これらの和 $X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数を求めよ。
- (5) (4) で求めたモーメント母関数を持つ確率分布の確率密度関数を記せ。(これは答えのみで構わない)

講義内容に対応させると、このテンプレートの「 \dots 」には「一様分布」「指数分布」「アーラン分布」「ガンマ分布」「ベータ分布」「正規分布」「カイ 2 乗分布」のいずれかの確率密度関数が入り得る。また計算量が増えるが、(4) 以降を

- (4') 確率分布 F に互いに独立に従う 2 つの確率変数を X_1, X_2 とする。畳み込み

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx \quad (4)$$

によって $Z = X + Y$ が従う確率分布の確率密度関数 $f_z(z)$ を求めよ。

- (5') (4') で求めた確率密度関数から、これを持つ確率分布のモーメント母関数を導け。
- (6') (3) で求めた確率分布のモーメント母関数から $Z = X + Y$ の和の分布のモーメント母関数を求め、(5) の解と一致することを確認せよ。

とするバリエーションも考えられる。

1.3 テンプレート 3: 和の分布づくし

今回は採用しないが、このように少し不親切な出題形態も考えられる。

3. この問題は確率分布の間の関係に関する問題である。下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) ある指数分布に互いに独立に従う n 個の確率変数 X_1, \dots, X_n の和の分布の確率密度関数を求めよ。
- (2) ある正規分布に互いに独立に従う 2 個の確率変数 X_1, X_2 の和の分布の確率密度関数を求めよ。
- (3) あるポアソン分布に互いに独立に従う 2 個の確率変数 X_1, X_2 の和の分布の確率関数を求めよ。次いで、和 $X_1 + X_2 = k$ を所与としたときの X_1 の条件付き分布の確率関数を求めよ。
- (4) ある幾何分布に互いに独立に従う n 個の確率変数 X_1, \dots, X_n の和の分布の確率関数を求めよ。
- (5) ある二項分布に互いに独立に従う n 個の確率変数 X_1, \dots, X_n の和の分布の確率関数を求めよ。
- (6) ある一様分布に互いに独立に従う 2 個の確率変数 X_1, X_2 の和の分布の確率関数を求めよ。
- (7) ある負の二項分布に互いに独立に従う n 個の確率変数 X_1, \dots, X_n の和の分布の確率関数を求めよ。

これらの問題の解法には、それぞれの確率分布についての知識と、モーメント母関数の活用、畳み込みの計算、特性関数の活用のいずれかが必要となる。

1.4 その他

以下は、確率分布についての計算には以下のような出題も考えられる、というだけで今回は出題しない。

4. 今年度は講義の範囲外としたが、確率分布表の見方を問う問題。
5. 累積分布関数から確率関数もしくは確率密度関数を導出させるような問題。
6. 確率分布の特徴を問う問題。
7. 確率分布間の関係を問う問題。
8. 確率変数の定式化から入るよう応用な問題。

1.5 表記の揺れの注意

指数分布の密度関数の書き方は次の二つがある。

$$\lambda e^{-\lambda x}$$
$$\frac{e^{-x/\mu}}{\mu}$$

ガンマ分布の密度関数の書き方も次の二つがある。

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$
$$\frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}$$

ミニテスト #3(4限向け)

今回の範囲は参考書の5章と6章の一部。解答用紙は1枚の両面のみとする。名前・学籍番号を忘れずに記すこと。大問の解答順序は自由でよい。結果のみの回答は前向きには評価しないので、結果のみでなく計算の経緯を論理の飛躍がないように記すこと。また必ず履修した時間割で受験すること。履修していない時間で回収した答案は採点していない。

1. この問題は離散確率分布に関する問題である。次の確率関数

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{otherwise (その他)}. \end{cases}$$

を持つ確率分布 F につき、下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) 確率分布 F の期待値を求めよ。
- (2) 確率分布 F の分散を求めよ。
- (3) 確率分布 F のモーメント母関数を求めよ。
- (4) 確率分布 F に互いに独立に従う2つの確率変数を X_1, X_2 とする。これらの和 $X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数を求めよ。
- (5) (4) で求めたモーメント母関数を持つ確率分布の確率関数を記せ。(これは答えのみで構わない)

2. この問題は連続確率分布に関する問題である。次の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

を持つ確率分布 F につき、下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) 確率分布 F の期待値を求めよ。
- (2) 確率分布 F の分散を求めよ。
- (3) 確率分布 F のモーメント母関数を求めよ。
- (4) 確率分布 F に互いに独立に従う2つの確率変数を X_1, X_2 とする。これらの和 $X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数を求めよ。
- (5) (4) で求めたモーメント母関数を持つ確率分布の確率関数を記せ。(これは答えのみで構わない)

ミニテスト #3(5 限向け)

今回の範囲は参考書の 5 章と 6 章の一部。解答用紙は 1 枚の両面のみとする。名前・学籍番号を忘れずに記すこと。大問の解答順序は自由でよい。結果のみの回答は前向きには評価しないので、結果のみでなく計算の経緯を論理の飛躍がないように記すこと。また必ず履修した時間割で受験すること。履修していない時間で回収した答えは採点していない。

1. この問題は離散確率分布に関する問題である。次の確率関数

$$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}, & x = 0, 1, \\ 0, & \text{otherwise (その他)}. \end{cases}$$

を持つ確率分布 F につき、下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) 確率分布 F の期待値を求めよ。
- (2) 確率分布 F の分散を求めよ。
- (3) 確率分布 F のモーメント母関数を求めよ。
- (4) 確率分布 F に互いに独立に従う 2 つの確率変数を X_1, X_2 とする。これらの和 $X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数を求めよ。
- (5) (4) で求めたモーメント母関数を持つ確率分布の確率関数を記せ。(これは答えのみで構わない)

2. この問題は連続確率分布に関する問題である。次の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

を持つ確率分布 F につき、下記の問いに答えよ。解答には、結果のみでなく計算の経緯も論理立てて記すこと。結果のみでは評価しない。

- (1) 確率分布 F の期待値を求めよ。
- (2) 確率分布 F の分散を求めよ。
- (3) 確率分布 F のモーメント母関数を求めよ。
- (4) 確率分布 F に互いに独立に従う 2 つの確率変数を X_1, X_2 とする。これらの和 $X_1 + X_2$ の確率分布のモーメント母関数を求めよ。
- (5) (4) で求めたモーメント母関数を持つ確率分布の確率密度関数を記せ。(これは答えのみで構わない)